

Aula no 29

Vetor de Poynting

Densidade de energia eletromagnética (em campos quase-estacionários)

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = U_E + U_B \quad (37)$$

com $E \equiv |\vec{E}|$ e $B \equiv |\vec{B}|$
então

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

como $\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \vec{j} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

logo $\boxed{\epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})}{\mu_0} - \vec{j} \cdot \vec{E}} \quad (38)$

e
como $-\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

logo $\boxed{\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E}} \quad (39)$

Substituindo Eqs. (38) e (39) na Eq. (37)

ficamos com

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = + \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \left[-\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \right] \quad (40)$$

Agora $\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B})$

então

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (41)$$

Definimos $\vec{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad (42)$

Vetor de Poynting = energia por unidade de tempo por unidade de área

$\vec{j}$ na Eq. (41) é associado ao movimento de cargas livres ^{no vácuo}, isto é,

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \quad (43)$$

Logo o 1º termo na Eq. (42) é

reescrita como

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \rho \vec{E} \cdot \vec{v} \quad (44)$$

A densidade de força com que o campo eletromagnético atua sobre cargas

e correntes

$$\frac{j}{c}$$

$$\perp \vec{v} \text{ e } \vec{B}$$

$$\vec{f} = \int \left[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right] = \int \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$$

$$\frac{E}{mb} = \frac{Q}{r^2} \text{ campo de } b$$

logo

$$\vec{v} \cdot \vec{f} = \vec{f} \cdot \vec{v} = \left[\int \vec{v} \cdot \vec{E} = \vec{j} \cdot \vec{E} \right] \quad (45)$$

Integrando a Eq. (41) sobre um

volume limitado p/ Σ

$$-\frac{d}{dt} \int_V u dV = \int_V (\vec{j} \cdot \vec{E}) dV + \int_V \vec{v} \cdot \vec{S} dV$$

ou com a igualdade dada na Eq. (45)

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V u \, dV = \int_V (\vec{f} \cdot \vec{v}) \, dV + \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{S} \, dV \quad (46)$$

$\int_V (\vec{f} \cdot \vec{v}) \, dV =$ trabalho total p/ unidade de tempo realizado pelo campo eletromagnético sobre os corpos contidos em V

Agora

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{S} \, dV = \underbrace{\oint_A \vec{S} \cdot \hat{n} \, d\vec{a}}_{\text{fluxo p/ fora de } V} \quad (47)$$

$=$ fluxo de energia eletromagnética p/ fora de V p/ unidade de tempo

Logo

$\vec{S}$ = densidade de corrente de energia
eletromagnética

Se $\vec{j} = 0$ ($\vec{j} = 0$), a Eq. (41) pode

ser escrita como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad (48)$$

Conservação de energia eletromagnética.

Voltando às ondas planas ($\vec{u}$ necessariamente mono direcional)

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \hat{u} \times \vec{E}$$

$$u = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)$$

densidade de energia (energia/volume)

$$1/c = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \quad \text{então}$$

$$B^2 = \frac{1}{c^2} E^2 = \epsilon_0 \mu_0 E^2$$

$$\boxed{\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}}$$

(49)

Então

$$\vec{S} = \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{E} \times \frac{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}{\mu_0} (\hat{u} \times \vec{E})$$

$$\vec{S} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \vec{E} \times (\hat{u} \times \vec{E}) \quad (50)$$

$$\vec{S} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left[E^2 \hat{u} - \underbrace{(\vec{E} \cdot \hat{u}) \cdot \vec{E}}_{=0} \right]$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \underbrace{\epsilon_0 E^2}_{U_E} \hat{u} \quad (51)$$

Como $U_E = U_M$

$$U = U_E + U_M = 2 U_E \Rightarrow U_E = \frac{1}{2} U \quad (52)$$

$$\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} U$$

Substituindo Eq. (52) na Eq. (51),

ficamos

$$\vec{S} = \epsilon U \hat{u} \quad (52)$$

Ondas eletromagnéticas não carregam somente energia, elas também carregam momento linear. A densidade de momento armazenado no campo é

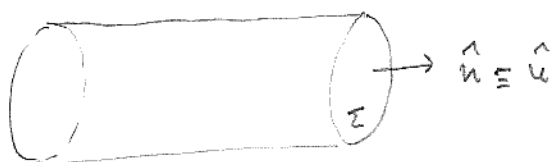
$$\vec{P} = \frac{1}{c^2} \vec{S} \quad (53)$$

Para ondas propagação como $\vec{S} = c U \hat{a}$

$$\vec{P} = \frac{1}{c} U \hat{a} \quad (54)$$

onde $\hat{a}$ é o vetor unitário na direção da propagação.

U é a densidade de energia e $\vec{S}$ a densidade do corrente de energia $\vec{S}/U = c \hat{u}$, velocidade de propagação de energia eletromagnética



Uma onda eletromagnética plana transporta energia através da superfície $\Sigma \perp$ a $\hat{u}$

por Δt = energia contida num cilindro de base Σ e comprimento $c\Delta t = U \Sigma c \Delta t$

Isso significa que energia p/ unidade de

tempo e área = Uc

No caso de uma onda plana

monocromática

$$\vec{E} = E_0 \hat{e} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)$$

$$S = c \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)$$

A média temporal

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \hat{u}$$

A Intensidade da onda eletromagnética definida como o valor médio da energia eletromagnética por unidade de tempo que atravessa uma unidade de área normal a $\hat{u}$

$$I = \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{u} = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2$$